Actes de la XVII Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. Barcelona, SCHCT-IEC
Ferragud, C.; Massa-Esteve, M. R. (ed.) (2021) p. 17-28
DOI: 10.2436/10.2006.04.3

TEXTOS HISTÒRICS PER A L'APRENENTATGE DE LES MATEMÀTIQUES. EL CAS DELS NOMBRES NEGATIUS

FÀTIMA ROMERO VALLHONESTA;[1] M. ROSA MASSA-ESTEVE;[2] IOLANDA GUEVARA CASANOVA;[3] CARLES PUIG-PLA[2]
[1] CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.
[2] DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.
[3] DEPARTAMENT D'ENSENYAMENT, GENERALITAT DE CATALUNYA, I UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA.

Paraules clau: *aprenentatge de matemàtiques, nombres negatius, textos històrics*

Historical texts for teaching mathematics. The case of negative numbers

Summary: *The activities based on the analysis of historical texts help to improve the integral education of students, while providing them with additional knowledge about the social and scientific context of the periods involved. Students gain a vision of mathematics not as a final product, but as a useful, human, interdisciplinary and heuristic science which has been developed by trying to answer the questions that humanity has posed throughout time with respect to the world around us. Through our experience as teachers, we have realized that many students have difficulty understanding and handling negative numbers. Accordingly, this paper presents an analysis of some relevant historical texts that deal with negative numbers. On the basis of these texts, classroom activities can be designed with contents related to numbering, which forms part of the numbering and calculation block of the curriculum. In addition, students can work with problem-solving, reasoning and proof processes in these activities, thus addressing connections, communication and representation.*

Key words: *teaching mathematics, negative numbers, historical texts*

Introducció[1]

L'estudi de la història del pensament és necessari per tal d'entendre les dificultats epistemològiques que poden tenir els alumnes en l'aprenentatge d'alguns concep-

1. Aquest treball s'inclou en el projecte HAR2016-75871-R del Ministeri d'Economia i Competitivitat espanyol.

tes. En el cas dels nombres negatius, pot semblar que els alumnes en tenen incorporada la noció, ja que en la vida quotidiana es troben amb temperatures negatives, dates que s'expressen amb nombres negatius i també estan familiaritzats amb els nombres negatius que hi ha en alguns ascensors, per citar-ne alguns exemples. De tota manera, el pas de donar sentit a quantitats negatives aïllades i manipular-les no és senzill.

Les activitats basades en l'anàlisi de textos històrics relacionats amb el currículum contribueixen a millorar la formació integral dels alumnes i els proporcionen alhora un coneixement addicional del context social i científic dels períodes involucrats.[2] El fet de treballar amb textos històrics permet als alumnes adonar-se d'algunes de les dificultats que hi ha hagut al llarg de la història per tal que determinats continguts fossin adoptats per la comunitat científica. No es tracta de fer repetir als alumnes el camí recorregut al llarg de la història fins que els negatius van tenir la consideració de nombres, però el coneixement d'aquest camí per part del professorat permet triar textos significatius que els ajudin a aplanar-lo.

En aquesta comunicació presentem diversos textos rellevants pel que fa a la història dels nombres negatius, a partir dels quals es poden dissenyar activitats d'aula que contribueixin a la comprensió d'aquests nombres per part de l'alumnat.

Els currículums de primària[3] i secundària obligatòria[4]

En el currículum de l'educació primària apareixen els nombres negatius en el cicle superior, concretament en el bloc de numeració i càlcul. L'ítem que hi fa referència diu: «Interpretació dels nombres negatius en contextos significatius i reals». Es tracta, per tant, que els alumnes entenguin les expressions amb nombres negatius que poden trobar en contextos de la vida quotidiana com pot ser el cas de la temperatura a què fèiem referència en la introducció.

En el currículum de l'educació secundària obligatòria els nombres negatius apareixen en el primer curs, també en el bloc de numeració i càlcul. Els ítems que hi fan referència són els següents:

— Significat en contextos diversos. Expressió de valors o variacions (quantitats, valor monetari, temps, temperatures…).
— Comparació i ordenació.
— Els nombres indoaràbics, la introducció del zero i els nombres negatius en la història de les matemàtiques.
— Representació gràfica (recta numèrica).
— Càlcul mental amb enters i fraccions.

En el cas de secundària també es fa referència al context i es posen exemples de la vida quotidiana, com a primària.

2. El nostre grup d'història de les matemàtiques de l'Associació de Barcelona per a l'Estudi i l'Aprenentatge de les Matemàtiques (ABEAM) fa més de vint anys que desenvolupa aquesta recerca. Dues de les publicacions més recents són: Romero i Massa-Esteve (2019) i Guevara i Puig-Pla (2019).

3. Decret 119/2015, de 23 de juny, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària.

4. Decret 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria.

La representació gràfica a què es fa referència en un dels ítems pot suggerir una idea més abstracta dels nombres negatius, tot i que també pot ser una manera de representar situacions quotidianes. De fet, però, la recta numèrica ha estat qüestionada per aprendre quantitats negatives, ja que el seu ús es limita a sumes i restes (Heeffer, 2011). No funciona en tractar proporcions ni divisions amb nombres negatius. A més a més, les dificultats més importants per comprendre els nombres negatius fan referència a les multiplicacions i divisions. La multiplicació de dos nombres negatius suscita molts dubtes i, tot i que es poden trobar exemples imaginatius per tal que els alumnes recordin que el producte de dos nombres negatius és positiu, la raó que sigui així és la coherència dels càlculs. Alguns autors se sorprenien amb la igualtat: $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$, ja que un nombre (–1) dividit per un de més gran (1) no pot donar el mateix que el gran (1) dividit pel petit (–1) (Mancosu, 1996).

On es fa referència als nombres negatius com a quantitats aïllades és en el darrer ítem sobre el càlcul mental. És molt necessari, doncs, l'ítem que fa referència a la introducció històrica dels nombres negatius per tal que el pas de situacions de context a situacions més abstractes pugui vèncer les dificultats epistemològiques que presenta la introducció d'aquests nombres.

Textos històrics significatius sobre els nombres negatius

Molts dels textos històrics que tracten directament amb nombres negatius estan relacionats amb el desenvolupament de la resolució d'equacions algebraiques. De fet, aquests materials representen una font d'idees per millorar-ne l'ensenyament. Encara que els textos que es presenten pertanyen quasi tots al Renaixement, cal recordar que els àrabs en la seva presentació de l'àlgebra empren l'operació de la restauració (eliminació dels termes negatius en una igualtat) abans de resoldre les equacions. I encara abans, textos matemàtics xinesos del segle I (*Nou capítols dels procediments matemàtics*), i autors grecs del segle III (Diofant) i indis del segle VII (Brahmagupta) van donar regles per treballar amb els nombres negatius relacionades, en tots els casos, amb la resolució d'equacions (Guevara, 2009).

El tractament dels negatius al món àrab

Els àrabs van tenir un paper fonamental en el desenvolupament de l'àlgebra i de la trigonometria, alhora que van fer contribucions importants a la física, l'astronomia, l'alquímia i la medicina. Van recollir el saber grec i indi, i van millorar i transformar aquests coneixements a partir dels recursos de la seva pròpia civilització (Benoit i Micheau, 1991).

Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, matemàtic, astrònom i membre de la Casa de la Saviesa de Bagdad, que va morir el 850 dC, és considerat com el creador de les regles de l'àlgebra. La seva obra *Hisâb al-jabr wal-muqqabala* (813) va ser traduïda al llatí per Robert de Chester amb el títol *Liber algebrae et almucabala* (Segòvia, 1145), d'on prové el nom actual *àlgebra*.

Al-Khwarizmi, al començament de la seva obra *Hisâb al-jabr wal-muqqabala*, explica la seva utilitat per resoldre problemes.[5] L'obra d'al-Khwarizmi constava d'una part teòrica amb el mètode per resoldre equacions amb coeficients positius (que classificava en sis tipus, fins a segon grau) i d'una

5. «El meu propòsit és compondre una obra breu sobre el càlcul per les regles de compactació i reducció, limitant-nos al que és a la vegada més fàcil i més útil en l'aritmètica, i que els homes necessiten constantment en els casos d'herències, llegats, particions, plets així com en el comerç i en totes les relacions dels uns amb els altres, o bé on es necessiten mesures de terres, excavacions de canals, càlculs geomètrics i altres assumptes de molts diversos tipus.» (Rosen, 1831: 3; la traducció és nostra.)

part pràctica que contenia problemes il·lustratius de cadascun dels tipus: problemes de nombres, de comerç, de dots, del blat i la civada, dels exèrcits i dels correus.

Totes les altres àlgebres àrabs, basades en aquesta, seguien la mateixa estructura.[6] Les equacions les classificaven en sis tipus, amb coeficients positius, sense escriure cap símbol, és a dir, en forma retòrica: «Quadrats igual a arrels»,[7] «Quadrats igual a nombres»,[8] «Arrels igual a nombres»,[9] «Quadrats i arrels igual a nombres»,[10] «Quadrats i nombres igual a arrels»,[11] «Arrels i nombres igual a quadrats».[12]

Primer donaven, també amb llenguatge retòric, l'algorisme de resolució de cadascun dels tipus mitjançant un exemple numèric i, després, en la part pràctica, cada vegada que en un problema plantejaven una equació, en donaven el tipus i la solució, sense fer les operacions. No empraven els negatius i, de fet, el terme *al-jabr* ('*chéber*' o 'restauració') significa eliminar totes les quantitats de l'equació que tinguin signe negatiu, *wa* ('i'), i *al-muqabala* ('reducció') significa agrupar els termes de la mateixa espècie.

La regla dels signes a Fibonacci

Qui va difondre en el món occidental els coneixements de les regles algebraiques dels àrabs va ser Leonardo de Pisa (1180-1250), fill d'un cònsol, anomenat Bonacci, conegut ara amb el nom de Fibonacci, però a l'època era citat com a Leonardo Pisano. Va aprendre els càlculs i les tècniques mercantils dels àrabs. Va escriure: *Liber abaci* (1202), *Practica geometriae* (1220), *Flos* (1225) i *Liber quadratorum* (1225).

A la seva obra *Liber abaci* (1202), hi proposa els problemes que va aprendre a resoldre a les àlgebres àrabs així com els mètodes de càlcul de la numeració índia. *Liber abaci* conté en el seu últim capítol les regles de *chéber* i *al-muqabala*. Els temes que tracta en els diferents capítols són els següents: en els primers set capítols introdueix els nombres indoaràbics i els seus mètodes de càlcul, en els capítols del 8 a l'11 resol problemes de mercaders, en els capítols 12 i 13 resol problemes recreatius que plantegen equacions, en el capítol 14 explica el càlcul d'arrels quadrades i cúbiques, i dels binomis, i en el capítol 15 tracta de les regles geomètriques i dels problemes d'àlgebra i *al-muqabala*.

De fet, Fibonacci (Leonardo de Pisa) en la seva obra *Liber abaci* de 1202 no accepta els nombres negatius i els anomena *sords*,[13] en canvi sí que empra, en el capítol 14, sense justificar-ho, la regla dels signes en multiplicar binomis amb signe menys.

El Renaixement

El període comprès entre mitjans del segle XIV i començaments del XVII va ser l'època del Renaixement, així anomenada pel ressorgiment o renaixement de l'interès per la Grècia i la Roma de l'anti-

6. S'anomenen *àlgebres* les obres amb contingut algebraic.
7. $x^2 = bx$.
8. $ax^2 = c$.
9. $bx = c$.
10. $ax^2 + bx = c$.
11. $ax^2 + c = bx$.
12. $ax^2 = bx + c$.
13. De fet, els nombres negatius s'anomenaven també *ficticis*, *falsos*, *imaginaris*, *quimèrics*, *absurds* o *quantitats inferiors a res* i el seu estat romania encara sense classificar en el segle XVII.

guitat clàssica. El llatí i el grec eren les claus indispensables per a l'estil, els coneixements i el bon gust, i van assumir un significat fonamental en l'educació que es conservaria durant segles.

Va ser també el període dels grans viatges de descobriment que van ampliar els horitzons de la civilització occidental. Les riqueses del Nou Món van ajudar a desenvolupar les ja de per si creixents economies europees. La influència més gran del Renaixement en la tecnologia es va registrar en l'arquitectura. L'abandó de les formes gòtiques per l'arquitecte italià Leon Battista Alberti (1404-1472) i els seus successors, i la gradual difusió de l'estil neoclàssic palatí en l'edificació, des d'Itàlia fins a tot Europa, va implicar canvis en la tècnica de la construcció. Els arquitectes i constructors que van portar a terme els seus projectes van haver d'aprendre com construir grans cúpules catedralícies tals com la de Sant Pere de Roma, que Europa no havia vist mai anteriorment. El Renaixement va encoratjar artistes i artesans (orfebres com Cellini, pintors com Rafael) i a la vegada va modificar els objectius de les seves activitats. La Itàlia renaixentista del segle XVI, època molt rica culturalment, és l'època de Leonardo da Vinci, Miquel Àngel, Botticelli, Alberti i molts altres. També és l'època en què es comencen a recuperar directament els textos grecs i es tradueixen al llatí. A tall d'exemple podríem citar Federico Commandino (1506-1575), que tradueix les grans obres clàssiques d'Arquímedes, Ptolemeu, Euclides, Aristarc, etc.

Pel que fa a la matemàtica, es produeix la normalització dels caràcters numèrics indis introduïts a les aritmètiques mercantils, però l'àlgebra no és considerada encara una part independent dins de les matemàtiques. El saber de les aritmètiques mercantils i de les fonts orientals usades pels mercaders italians es recull en l'obra enciclopèdica de Luca Pacioli (1447-1517) titulada *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (Venècia, 1494), que va tenir gran difusió a la seva època. En aquesta obra, hi trobem explicitada la regla dels signes: *via* vol dir 'per', *piu* vol dir 'més' i *meno* vol dir 'menys' (vegeu fig. 1).

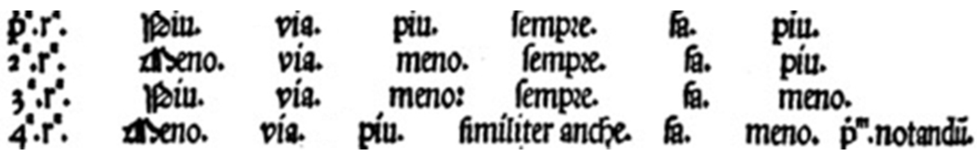

p°.r°. Piu. via. piu. sempre. fa. piu.
2°.r°. Meno. via. meno. sempre. fa. piu.
3°.r°. Piu. via. meno: sempre. fa. meno.
4°.r°. Meno. via. piu. similiter anche. fa. meno. p°. notandu.

FIGURA 1. Regla dels signes de Luca Pacioli.
FONT: *Summa*, Pacioli, 1494: f. 112v.

A la pàgina següent, a la *Distinctio 8. Tractatus primus*, Pacioli justifica la regla de multiplicar dos negatius i que resulti un positiu a partir de l'operació $(10-2)\cdot(10-2)=64$. L'autor explica que aquesta multiplicació és $8\cdot 8=64$, però que, si multipliquem el binomi, convindrà que el signe del 4 sigui positiu, cosa que correspon que menys per menys sigui més (vegeu fig. 2).

També Christoff Rudolff, a la seva obra *Coss* (1525), els anomena *nombres absurds* i, com altres autors posteriors, no reconeix els negatius, ni té en compte les solucions negatives d'una equació. El canvi es va produir al Renaixement amb l'obra algebraica de Gerolamo Cardano (Pavia, 1501 - Roma, 1576).

Cardano anomena i reconeix els nombres negatius

Una cinquantena d'anys més tard que Pacioli, Cardano va publicar la seva *Artis magnae*, que va canviar la perspectiva de l'àlgebra dins la matemàtica. Era fill de Fazio Cardano (advocat milanès). Als dinou anys estudiava medicina a la Universitat de Pavia i als vint-i-sis anys va aconseguir el grau de doctor.

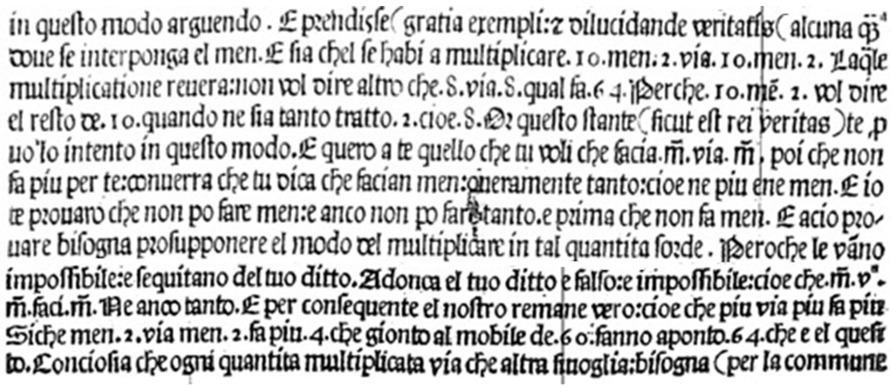

in questo modo arguendo. E prendisse (gratia exempli: e dilucidande veritatis) alcuna qu[illegible]
doue se interponga el men. E sia chel se habi a multiplicare. 10. men. 2. via. 10. men. 2. Laqle
multiplicatione reuera: non vol dire altro che. 8. via. 8. qual fa. 64. Perche. 10. mē. 2. vol dire
el resto de. 10. quando ne sia tanto tratto. 2. cioe. 8. Or questo stante (sicut est rei veritas) te p
uo'lo intento in questo modo. E quero a te quello che tu voli che facia. m̄. via. m̄, poi che non
fa piu per te: conuerra che tu dica che facian men: o veramente tanto: cioe ne piu ene men. E io
te prouaro che non po fare men: e anco non po far tanto. e prima che non fa men. E acio pro-
uare bisogna prosupponere el modo del multiplicare in tal quantita sorde. Peroche le vano
impossibile: e sequitano del tuo ditto. Adonca el tuo ditto e falso: e impossibile: cioe che. m̄. v.
m̄. faci. m̄. Ne anco tanto. E per consequente el nostro remane vero: cioe che piu via piu fa piu
Siche men. 2. via men. 2. fa piu. 4. che gionto al mobile de. 60: fanno aponto. 64. che e el quesi
to. Conciosia che ogni quantita multiplicata via che altra sivoglia: bisogna (per la commune

Figura 2. Principi i final d'un fragment en el qual Pacioli justifica retòricament la regla del producte de dos signes negatius.
Font: *Summa*, Pacioli, 1494: f. 113r.

L'any 1529 es va casar amb Lucia Bandareni, amb qui va tenir tres fills. Del 1552 al 1559 va viatjar a Escòcia, on la seva reputació com a metge es va consolidar. El 1560 va morir un dels seus fills a Pavia. El 1570 va ser empresonat per la Inquisició per haver dit que els esdeveniments de la vida de Jesús eren deguts a la influència dels estels. El 1571 va tornar a Roma i va escriure la seva biografia.

Els llibres escrits per Cardano sobre matemàtiques són: *Practica arithmetica* (1539); *Artis magnae, sive de regulis algebraicis* (1545) (vegeu fig. 3); *Liber de ludo aleae* (publicat el 1663).

Artis magnae té quaranta capítols. Els quatre primers són de caràcter general. El capítol v està dedicat a les equacions de segon grau. El capítol vi és una preparació per a la resolució de la cúbica.


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Figura 3. Portada de l'obra de Cardano sobre àlgebra *Artis magnae* (1545).
Font: Cardano, 1545: portada.

El capítol VII tracta la transformació de les equacions. En el capítol VIII resol un tipus especial d'equacions. En els capítols IX i X analitza la solució de sistemes de dues equacions amb dues incògnites. En els capítols XI al XXIII s'estudien les solucions de la cúbica. En els capítols XXIV-XXVIII es tracten noves equacions i regles imperfectes. Els capítols XXIX-XXXVIII versen sobre regles de posició, regla àuria[14] i problemes pràctics d'aplicació. En el capítol XXXIX s'analitzen les equacions biquadrades i acaba l'obra amb diverses proposicions que constitueixen el capítol XL.

Amb aquesta obra de Cardano s'inicia un procés de maduració dels mètodes algebraics, com eines per a la resolució general de problemes. Comença l'algebrització dels problemes clàssics de geometria plana i la perspectiva d'emprar l'àlgebra no només per resoldre problemes específics sinó universals.

Al començament de l'obra, en el capítol primer, Cardano ja disserta sobre les potències senars i parelles per presentar els nombres negatius d'aquesta manera:

> Ara recordem que hem mostrat que hi ha potències parelles i senars. El quadrat, el quadrat del quadrat, el cub del quadrat i així sempre són potències parelles, mentre que la primera potencia, el cub i la cinquena i la setena potència són senars. Veritablement tant del 3 com del –3 es fa 9, ja que menys per menys multiplicat produeix més. Però en el cas de potències senars cadascuna va segons la seva natura. No produeix més a menys que derivi d'un número vertader (positiu), i un cub que el seu valor *és menys* o el que nosaltres anomenem *debitum* no pot ser produït per cap expansió d'un número vertader (positiu). Cal recordar això molt clarament.[15]

Més endavant, en el capítol XXXVII d'*Artis magnae*, titulat «De regula falsum ponendis» o bé «Regla de postular un negatiu», Cardano resol un problema posant un signe – al terme independent i arriba a una solució positiva i una de negativa, i, per tant, reconeix les solucions negatives.

> Aquest problema és solucionat per la mateixa regla: divideix 6 entre dues parts, el producte de les quals és –40. Quadra 3, la meitat de 6, farà 9. Afegeix aquest a 40, donarà 49, l'arrel quadrada és 7 i afegeix-ho a 3, la meitat de 6, i disminueix i et donarà +10 i –4 que multiplicant produiran –40 i, ajuntant, fan 6. Igualment –10 i +4 donarà –40 quan multipliquem, i –6 quan afegim. D'aquí que aquest problema és un d'un pur negatiu i pertany a la primera regla.[16]

La idea és que en el moment en què Cardano posa un signe negatiu al terme independent (la quantitat donada) de l'equació està acceptant una quantitat negativa com a solució del problema.

---

14. No té relació amb la raó àuria o divina proporció de Pacioli, és una regla per aproximar solucions que l'autor anomena *àuria*.

15. «Iam enim docuisse meminimus, quae sint impares, aut pares denominationes. Namque quadratum, & quadratum quadrati, cubumque quadrati, ac deinceps una semper intermissa pares, rem autem seu positionem, cubum, primum ac secundum. Relatum, impares vocamus denominationes. At vero quòd tam ex 3. quàm ex m.3. sit 9. Quoniam minus in minus ductum producit plus. At in imparibus denominationibus eadem servatur natura: seu quòd dicimus debitum, expositione ulla numeri veri produci potest, iam meminisse oportet dilucidius explicatur.» (Cardano, 1545: 222). La traducció al català d'aquest i de la resta de fragments citats és nostra.

16. «Per idem solvitur quaestio haec, fac ex 6. duas partes, quarum una in reliquam ducta, producatur m. 40. Duc 3. Dimidium 6. In se, sit 9. Adde ad 40 sit 49. Huius (arrel) quae est 7. Adde ad 3. Dimidium 6. & minue habebis 10. P. & 4. M. Quae ducta invicem producunt 40. m. & iuncta, faciunt 6.m. ideo etiam. Haec quaestio est de puro m. & pertinet ad primam regulam.» (Cardano, 1545: 287-288).

Acceptació clara dels nombres negatius al segle XVII

Més tard, ja al segle XVII, i després de l'obra *In artem analyticen isagoge* (1591) de François Viète (1540-1603), es troben les primeres acceptacions clares de les arrels negatives a una equació de segon grau. Així, a l'obra *Invention nouvelle en l'algèbre* (1629) d'Albert Girard (1595-1632) s'expressen les equacions amb les potències encerclades amb un nombre que correspon al seu exponent, i les operacions amb el signe més i menys, i emprant poques paraules (vegeu fig. 4, la traducció és nostra).

Quan els x^2 (2) són iguals a x (1) i número (0)
Per exemple sigui $5x^2$ igual a 18 x + 72
La meitat del número de les x és +9
El seu quadrat +81
Al qual afegirem el producte de 5 vegades +72, que és +360
La suma +441
La seva arrel és +21
La qual afegida i restada del primer en aquest ordre
donarà 30 i –12
Cadascun d'aquests dividit per 5 donarà 6 i també –12/5
valors de x

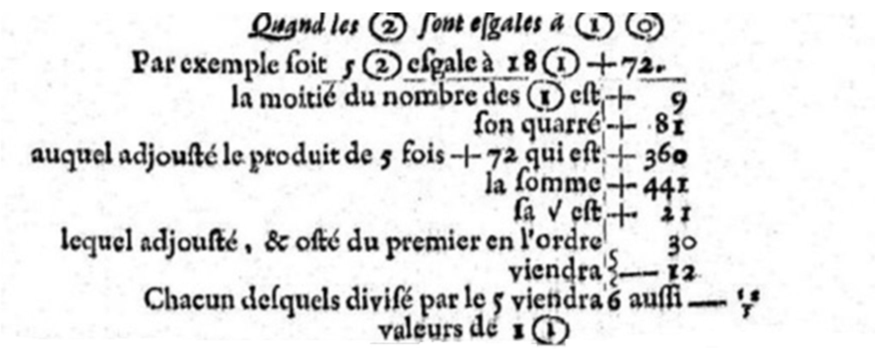

Quand les (2) ſont eſgales à (1) (0)
Par exemple ſoit 5 (2) eſgale à 18 (1) + 72.
la moitié du nombre des (1) eſt + 9
ſon quarré + 81
auquel adjouſté le produit de 5 fois + 72 qui eſt + 360
la ſomme + 441
ſa √ eſt + 21
lequel adjouſté, & oſté du premier en l'ordre 30
viendra — 12
Chacun deſquels diviſé par le 5 viendra 6 auſſi — 12/5
valeurs de 1 (1)

FIGURA 4. Girard ho presenta com una taula.
FONT: Girard, 1629: sense paginar.

El tractament dels negatius (arrels falses) a La géométrie (1637) de René Descartes (1596-1650)

Un dels punts rellevants dins de l'evolució de l'àlgebra i, en concret, per a la resolució d'equacions algebraiques va ser l'edició de l'obra de Descartes titulada *La géométrie* (1637), que apareix com un apèndix del *Discours de la méthode* (vegeu fig. 5). L'obra està dividida en tres llibres: el primer titulat «Sobre els problemes de construcció que requereixen només línies rectes i cercles», el segon titulat «Sobre la naturalesa de les línies corbes» i el tercer titulat «Sobre la construcció dels problemes que són sòlids o quasi sòlids».[17]

17. El programa de Descartes inclou dos aspectes: d'una banda, la classificació de corbes en algebraiques i mecàniques i, d'altra banda, les construccions geomètriques de les corbes. A l'obra de Descartes, l'àlgebra i la geometria es relacionen a través de les construccions de la intersecció de les corbes (quasi sempre paràboles i circumferències) que expressen les solucions d'equacions algebraiques (adequadament preparades) de grau més gran que dos.


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Avec Privilege.
1637

FIGURA 5. Portada del *Discours de la méthode* (1637) de Descartes.
FONT: Descartes, 1637: portada.

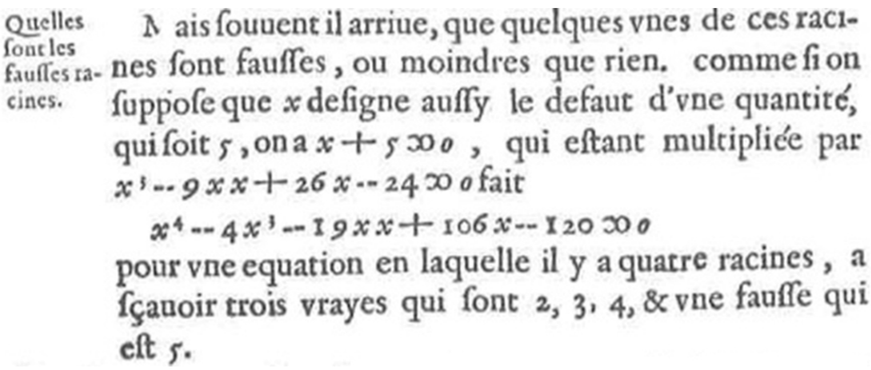
Aquest treball de Descartes va suposar un punt de partida per considerar la geometria des d'una altra perspectiva. A més, conté la notació actual amb dues variants menors: escriu *xx*, *aa*… en lloc de x^2, a^2…, i no fa servir el signe d'igualtat utilitzat actualment. Malgrat que s'hagi acabat imposant aquesta notació, durant els cinquanta o seixanta anys posteriors les diferents obres d'àlgebra van adoptar notacions diverses.

Descartes començava el llibre I de *La géométrie* construint una àlgebra de segments: es mostrava com sumar, multiplicar, dividir i extreure l'arrel quadrada de segments fent construccions geomètriques. Tot seguit, es feien les construccions geomètriques de les solucions dels problemes plans i s'explicava com construir la solució d'una equació de segon grau.

En el tercer llibre de *La géométrie*, Descartes dedueix i dona una regla per saber quantes arrels positives i negatives (ell les anomena *vertaderes* i *falses*) pot tenir una equació. La regla dels signes en una equació de Descartes proporciona un meravellós exemple per entendre el tractament de les arrels negatives d'una equació. Descartes no únicament accepta les arrels negatives, sinó que a partir dels canvis de signe de l'equació dona una regla per saber el nombre d'arrels positives i negatives.

Descartes comença el llibre tercer plantejant la naturalesa de les equacions i de les seves arrels positives i negatives i explica (vegeu fig. 6, la traducció és nostra):

> A vegades, però, esdevé que algunes de les arrels són falses, o més petites que no-res. Si suposem, per exemple, que x és el defecte d'una quantitat, com ara 5, tenim $x + 5 = 0$, que si és multiplicada per l'expressió
> $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$, dona $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$,
> una equació en la qual hi ha quatre arrels, a saber, tres vertaderes, que són 2, 3, 4 i una de falsa, que és 5.



Quelles ſont les fauſſes racines.

Mais ſouuent il arriue, que quelques vnes de ces racines ſont fauſſes, ou moindres que rien. comme ſi on ſuppoſe que x deſigne auſſy le defaut d'vne quantité, qui ſoit 5, on a $x + 5 \propto 0$, qui eſtant multipliée par $x^3 - 9xx + 26x - 24 \propto 0$ fait

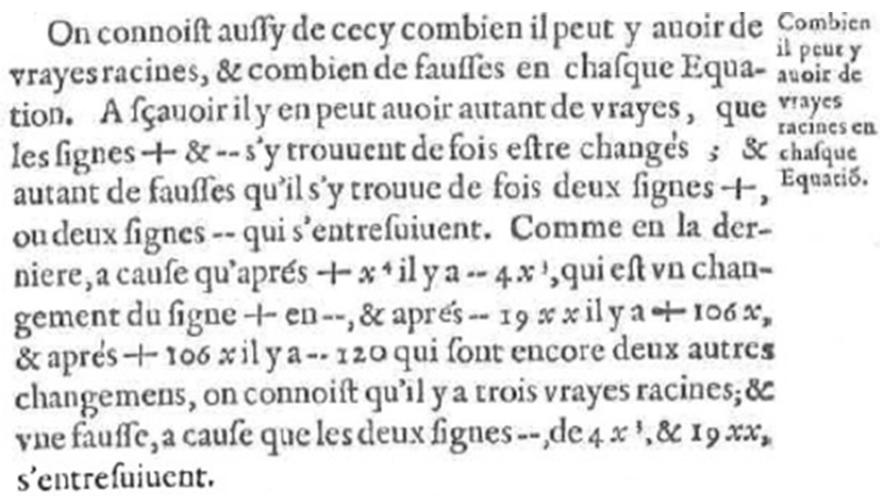
$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$$

pour vne equation en laquelle il y a quatre racines, a ſçauoir trois vrayes qui ſont 2, 3, 4, & vne fauſſe qui eſt 5.

FIGURA 6. Descartes enumera les solucions de l'equació tant negatives com positives.
FONT: Descartes, 1637: 372.

I continua reflexionant sobre les divisions de l'equació pels binomis per reduir els graus. I a la pàgina següent, després de preguntar-se quin és el nombre d'arrels vertaderes i falses d'una equació, explica que pot deduir el nombre d'arrels de cada tipus. Es pregunta al marge «Quantes arrels vertaderes pot tenir cada equació?» (vegeu fig. 7, la traducció és nostra). I respon:

> També es coneix de tot això quantes arrels vertaderes i falses pot haver-hi en cada equació. N'hi poden haver tantes de vertaderes com canvis de signes + i –. I tantes de falses com tantes vegades trobem dos signes + o dos signes – junts. Així, a la darrera equació, com que després de x^4 hi ha $-4x^3$, tenim un canvi de signe de + a –, i després de –19xx hi ha +106x, i després de +106 x hi ha –120, que són encara dos altres canvis, se sap, doncs, que hi ha tres arrels vertaderes i una de falsa, ja que els dos signes –, de 4 x^3 i 19xx, són consecutius.



On connoiſt auſſy de cecy combien il peut y auoir de vrayes racines, & combien de fauſſes en chaſque Equation. A ſçauoir il y en peut auoir autant de vrayes, que les ſignes + & -- s'y trouuent de fois eſtre changés ; & autant de fauſſes qu'il s'y trouue de fois deux ſignes +, ou deux ſignes -- qui s'entreſuiuent. Comme en la derniere, a cauſe qu'aprés $+x^4$ il y a $-4x^3$, qui eſt vn changement du ſigne + en --, & aprés $-19xx$ il y a $+106x$, & aprés $+106x$ il y a -120 qui ſont encore deux autres changemens, on connoiſt qu'il y a trois vrayes racines; & vne fauſſe, a cauſe que les deux ſignes --, de $4x^3$, & $19xx$, s'entreſuiuent.

Combien il peut y auoir de vrayes racines en chaſque Equatiõ.

FIGURA 7. Regla per saber quantes arrels positives i negatives pot tenir una equació.
FONT: Descartes, 1637: 373.

En el recorregut històric exposat sobre l'acceptació dels nombres negatius en la matemàtica occidental, hi tenen un paper destacat els textos històrics relacionats amb el desenvolupament de la resolució d'equacions. S'inicia amb Muhammad ibn Musaal-Khwarizmi (segle VIII-IX), creador de les regles de l'àlgebra, que si bé classifica i resol equacions, no n'accepta les solucions negatives, i es clou al segle XVII amb Girard i Descartes, que amb més o menys contundència accepten que les equacions poden tenir arrels positives i negatives, tot i que aquestes darreres encara les classifiquen com a falses solucions.

Algunes reflexions per a l'ensenyament dels nombres negatius

Quan l'acceptació dels nombres negatius i les operacions relacionades amb aquests comporten debats acalorats entre grans matemàtics durant alguns segles, no ha de sorprendre que també plantegi preguntes i dificultats a les aules d'avui. Però justament el coneixement de la història de l'evolució d'aquesta acceptació suggereix contextos i seqüències didàctiques per introduir i treballar aquests continguts amb la finalitat d'aconseguir aprenentatges competencials en els alumnes.

L'experiència dels alumnes, a l'assignatura d'història del Màster de Formació de Professors de Matemàtiques, utilitzant aquest material sobre els negatius per preparar activitats per a l'aula, va ser molt positiva. Després de presentar i analitzar els textos històrics en ordre cronològic se'ls va demanar que preparessin alguna activitat per als alumnes de l'ESO. La línia del temps, especificant i justificant els canvis en el tractament dels negatius, es troba a quasi totes les activitats proposades. Alguns alumnes (futurs professors) van preparar activitats a diferents nivells, així la regla d'operacions dels signes per emprar a primer de l'ESO i, per exemple, la regla de Descartes dels canvis de signes en els coeficients d'una equació per trobar el nombre d'arrels positives i negatives de les equacions, dirigida a alumnes de 3r i 4t de l'ESO. També es troba una justificació geomètrica, amb quadrats i rectangles, del quadrat del binomi, que ens mostra que cal sumar finalment el quadrat 4, tot seguint l'enunciat retòric de l'obra de Pacioli.

En la introducció dels nous conceptes referits als nombres negatius s'hauria de distingir entre «un nombre amb un signe» i un nombre negatiu. En un primer estadi, el nombre negatiu es pot introduir en contextos reals i propers als alumnes, ja que en la vida quotidiana es troben amb temperatures negatives, dates que s'expressen amb nombres negatius i, a la vegada, també estan familiaritzats amb els nombres negatius que hi ha en alguns ascensors, tal com hem apuntat a la introducció.

Però el sentit dels nombres negatius i les operacions amb aquests requereixen un estadi superior. Així, tot i que es poden donar unes regles d'operacions amb nombres positius i negatius, com feia Fibonacci als segles XII-XIII, potser una comprensió profunda per part de tot l'alumnat arribarà un cop passada la barrera conceptual del raonament simbòlic i s'introdueixi a la resolució d'equacions algebraiques.

De fet, l'algebrització de les matemàtiques va provocar la necessitat de redefinir els límits de les ciències matemàtiques com a disciplina i de tenir en compte una nova pràctica matemàtica, la comprensió de la qual suposava, per exemple, l'extensió de la noció de raó als nombres negatius.

Referències bibliogràfiques

Benoit, P.; Micheau, F. (1991). «¿El intermediario árabe?». A: Serres, M. (ed.). *Historia de las ciencias*. Madrid: Cátedra, p. 175-201. [1a ed., 1989]

Cardano, G. (1545). *Artis magnae, sive de regulis algebraicis.* Nuremberg: Johann Petreius.

Chemla, K; Shuchun, G. (ed.) (2005). *Les neuf chapitres*: *Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. París: Dunod.

«Decret 119/2015, de 23 de juny, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària» (2015). *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya*, núm. 6900 (26 juny), p.136.

«Decret 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria» (2015). *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya*, núm. 6945 (28 agost), p. 305.

Descartes, R. (1637). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences plus la dioptrique, les météores et la géométrie qui sont des essais de cette méthode*. Leiden: Ian Maire.

Girard, A. (1629). *Invention nouvelle en l'algèbre*. Amsterdam: Guillaume Iansson Blaeuw.

Guevara, I. (2009). «Els nombres negatius i el zero: Xina, Grècia, Índia, món àrab, Europa (250-1567)». *ARC, Aplicació de Recursos al Currículum* [en línia]. <http://apliense.xtec.cat/arc/node/421> [Consulta: 10 maig 2021].

Guevara, I.; Puig-Pla, C. (2019). «Reversed procedure and Kuttaka method: The calculation of Indian mathematics (ganita) in Aryabhatiya and Brahma-sphuta-siddhanta». A: Barbin, E.; Jankvist, U. T.; Kjeldsen, T. H.; Smestad, B.; Tzanakis, C. (ed.). *Proceedings of the Eighth European Summer University on history and epistemology in mathematics education ESU 8*. Oslo: OsloMet-storbyuniversitetet, p. 449-462.

Heeffer, A. (2011). «Historical objections against the number line». *Science & Education*, 20 (9), p. 863-880.

Mancosu, P. (1996). *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*. Oxford: Oxford University Press.

Pacioli, L. (1494). *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*. Venècia: Paganino de Paganini.

Pisano, L. (1202). *Liber abaci*.

Romero, F.; Massa-Esteve, M. R. (2019). «Sources from 16th century for the teaching and learning of mathematics». A: Barbin, E.; Jankvist, U. T.; Kjeldsen, T. H.; Smestad, B.; Tzanakis, C. (ed.). *Proceedings of the Eighth European Summer University on history and epistemology in mathematics education ESU 8*. Oslo: OsloMet-storbyuniversitetet, p. 626-639.

Rosen, F. (ed. i trad.) (1831). *The algebra of Mohammed Ben Musa*. Londres: Oriental Translation Fund.

Schubring, G. (2005). *Conflicts between generalization, rigor, and intuition*. Nova York: Springer.

Streefland, L. (1996). «Negative numbers: Reflections of a learning researcher». *Journal of Mathematical Behaviour*, 15, p. 57-77.

Thomaidis, Y. (1993). «Aspects of negative numbers in the early 17th century». *Science & Education*, 2, p. 69-86.

Witmer, R. T. (ed. i trad.) (1968). *Ars magna or the rules of algebra*. Cambridge, Mass.: The MIT Press. [Reeditat el 1993 per Dover Publications, Nova York]